Lucian Dragomir
Adriana Dragomir
Ovidiu Bădescu

Simularea examenului de bacalaureat
Matematică
Clasa a XI-a, profil tehnologic

30 de teste, după modelul M.E.N.

Editura Paralela 45

Cuprins

Teste pregătitoare pentru simularea examenului de bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

1. Determinaţi numerele întregi a şi b, ştiind că numerele 1, a, b, 10, sunt, în această ordine, în progresie aritmetică.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{10-2x}=2$.

3. Determinaţi numărul real t pentru care $2\cdot\log_2(1+t)=\log_2(1+5t)$.

4. Stabiliţi care dintre numerele $a=C_6^2$ şi $b=C_5^3$ este mai mic.

5. Determinaţi numărul întreg k, ştiind că punctul $M(3,1)$ este mijlocul segmentului care are extremităţi punctele $A(k,0)$ şi $B(4,k)$.

6. Pentru orice unghi cu măsura egală cu $x°$ se notează $E(x)=\sin 3x+4\cdot\cos 2x$. Arătaţi că $E(30)$ este un număr întreg.

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $x,y\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $D(3,-1)=10$.

b) Determinaţi numerele reale x pentru care $D(x,-1)=5$.

c) Arătaţi că $2\cdot D(x+1,x+2)\geq 1$, pentru orice număr real x.

2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3), B(1,1), C(2,k)$, $k\in\mathbb{R}$.

a) Arătaţi că ecuaţia dreptei AB este $2x+y-3=0$.

b) Determinaţi numărul întreg k, ştiind că punctele A,B,C sunt coliniare.

c) Demonstraţi că există un singur număr natural k, astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 5.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x}$.

a) Determinaţi numărul întreg $A=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei *f*.

c) Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=x-5$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcţiei *f*.

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\sqrt{3x+4}, & x\in[0,7]\\ 2x-9, & x\in(7,+\infty)\end{cases}$.

a) Arătaţi că funcţia *f* este continuă în punctul $x=7$.

b) Calculaţi $B=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-4}{x-4}=\dfrac{3}{8}$.

Testul 2

Subiectul I

1. Determinaţi al treilea termen al unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, ştiind că $a_1=3$ şi $a_4=18$.

2. Calculaţi $p=f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-3x+2$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2+\log_2(x+1)=\log_2(x+4)$.

4. Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.

5. Determinaţi numărul real a pentru care, în reperul cartezian xOy, punctele $A(0,-2), B(1,1)$ şi $C(2,a)$ sunt coliniare.

6. Calculaţi aria triunghiului *ABC*, ştiind că $m(\sphericalangle BAC)=90^\circ, \text{tg}\, B=\dfrac{4}{3}$ şi $AB=6$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

a) Arătaţi că, dacă $a+b=0$, atunci $\det A+\det B=\det(A+B)$.

b) Arătaţi că $A \cdot B = B \cdot A$ dacă şi numai dacă $b = a$.

c) Determinaţi numărul real a pentru care $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Se notează cu $D(x,y)$ determinantul matricei

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+2 & y+2 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că $D(2,0) = 4$.

b) Determinaţi numărul întreg k pentru care $D(4,k) = 2$.

c) Calculaţi suma elementelor matricei $B = A(0, 0) \cdot A(0, 0)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$.

a) Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei considerate.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{f(2x)} = 2$.

c) Calculaţi $L = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 \cdot f(x) - 1}{x^2 - 1}$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - x^2, g:(-\infty, 2] \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{2-x} - 1$.

a) Arătaţi că numărul $A = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x^2}{f(x)}$ este întreg.

b) Calculaţi $B = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

c) Rezolvaţi inecuaţia $f(x) \cdot g(x) \le 0$.

Testul 3

Subiectul I

1. Determinaţi suma primilor cinci termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \ge 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi $a_4 = 9$.

2. Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(3,m)$ este situat pe graficul funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Soluții

Testul 1

Subiectul I. 1. Dacă r este rația progresiei, atunci $10 = 1 + 3r$, de unde $3r = 9 \Rightarrow r = 3$. Așadar, $a = 1 + 3 = 4$, $b = 4 + 3 = 7$. **2.** $10 - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$, număr care verifică, evident, ecuația propusă. **3.** Logaritmii au sens dacă $1+t>0, 1+5t>0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t\in(-1,+\infty)\cap\left(-\frac{1}{5},+\infty\right) = \left(-\frac{1}{5},+\infty\right)\overset{\text{not.}}{=} D$; folosind proprietățile logaritmilor, ecuația se poate scrie: $\log_2(1+t)^2=\log_2(1+5t)$, de unde avem $1+2t+t^2 = 1+5t$ și astfel $t^2-3t=t(t-3)=0$. Se obțin acum soluțiile $t_1=0\in D, t_2=3\in D$. (*Observație*: în cazul în care nu impuneți condițiile inițiale, este absolut necesar să faceți la final verificarea soluțiilor!) **4.** Cum $a=C_6^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}=15$ și $b=C_5^3=C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10$, deducem că $b<a$. **5.** Din $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$ rezultă $3=\frac{k+4}{2}\Rightarrow 6=k+4\Rightarrow k=2$; analog, $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\Rightarrow 1=\frac{k}{2}\Rightarrow k=2$; în concluzie, $k=2$. **6.** $E(30) = \sin 90°+4\cos 60° =$ $= 1+4\cdot\frac{1}{2}=1+2=3\in\mathbb{Z}$.

Subiectul al II-lea. 1. a) $D(3,-1)=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 3\cdot 3-(-1)\cdot 1=9+1=10$; b) $D(x,-1) =$ $=\begin{vmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{vmatrix} = x^2+1=5 \Rightarrow x^2=4\Rightarrow x\in\{-2, 2\}$; c) Măcar acum este momentul să calculăm, dacă nu am făcut-o de la început, determinantul matricei $A(x, y)$: $D(x, y) =$ $= x^2+y^2$; avem astfel: $2\cdot D(x+1,x+2) = 2\cdot\left((x+1)^2+(x+2)^2\right) = 2\cdot\left(2x^2+6x+5\right)$.

Inegalitatea propusă este echivalentă cu $4x^2+12x+9=(2x+3)^2\geq 0$, care e adevărată pentru orice număr real x. **2.** a) Ecuaţia dreptei AB este $AB:\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, adică $3x+y+0-3-x-0=0$ sau $y+2x-3=0$. Există însă şi alte variante de rezolvare, de exemplu AB: $y-y_A=m_{AB}\cdot(x-x_A)$; b) Punctele A,B,C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$, de unde $k+4-3=0 \Leftrightarrow k=-1$; c) Aria triunghiului ABC este $\mathscr{A}=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, cu $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=k+1$; $\frac{1}{2}\cdot|k+1|=5 \Rightarrow |k+1|=10 \Rightarrow (k+1) \in \{-10, 10\} \Rightarrow k \in \{-11, 9\}$.

Subiectul al III-lea. 1. a) $A = \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1}(x-4) = -3 \in \mathbb{Z}$; b) Deoarece $f(0+0)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\left(\frac{4}{^{+}0}\right)=+\infty$, rezultă că ecuaţia asimptotei verticale (la dreapta) la graficul funcţiei f este $x = 0$; c) Cum $m = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+5}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) = 1$ şi $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5x+4}{x}-x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-5x+4}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-5+\frac{4}{x}\right) = -5+0=-5$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y = x - 5$ este asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcţiei f. **2.** a) $f(7-0) = \sqrt{21+4} = \sqrt{25} = 5$ şi $f(7+0) = 14-9 = 5 = f(7) \Rightarrow$ funcţia f este continuă în $x = 7$; b) $B = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-7}{2x-9} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\left(2-\frac{7}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(2-\frac{9}{x}\right)} = \frac{2-0}{2-0} = 1$; c) $\lim\limits_{x\to4}\frac{f(x)-4}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x-4} = \lim\limits_{x\to4}\frac{3x+4-16}{(x-4)\cdot\left(\sqrt{3x+4}+4\right)} = \lim\limits_{x\to4}\frac{3\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}\cdot\left(\sqrt{3x+4}+4\right)} = \frac{3}{8}$.

Testul 2

Subiectul I. 1. Dacă r este raţia progresiei, atunci $18 = 3 + 3r \Rightarrow 3r = 15 \Rightarrow r = 5$ şi astfel termenul cerut este $a_3 = a_1 + 2r = 3 + 10 = 13$. **2.** Deoarece $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, deducem că $p = f(-1) \cdot 0 \cdot f(1) = 0$. **3.** Ecuaţia se poate scrie $\log_2 4 + \log_2(x+1) = \log_2(x+4)$ sau $\log_2 4 \cdot (x+1) = \log_2(x+4) \Rightarrow 4x + 4 = x + 4 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$; verificare imediată: $2 + 0 = 2$. **4.** Există 90 de numere naturale de două cifre: 10, 11, 12, …, 99; dintre acestea, divizibile cu 5 sunt: $10 = 5 \cdot 2$, $15 = 5 \cdot 3$, $20 = 5 \cdot 4$, ..., $95 = 5 \cdot 19$, adică 18 numere. Probabilitatea cerută este, aşadar, $p = \dfrac{\text{nr. cazurilor favorabile}}{\text{nr. cazurilor posibile}} = \dfrac{18}{90} = \dfrac{1}{5}$. **5.** Vom folosi aici altă metodă decât cea de la testul anterior. Pantele dreptelor AB şi AC sunt $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3$, respectiv $m_{AC} = \dfrac{a+2}{a}$; punctele sunt coliniare dacă şi numai dacă $m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow \dfrac{a+2}{2} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 6 \Leftrightarrow a = 4$. **6.** Un mic desen poate fi de mare ajutor! Cum $\operatorname{tg} B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow AC = \dfrac{6 \cdot 4}{3} = 8$. (Faceţi pe foaia de examen calculele complete, chiar dacă noi, aici, nu le facem întotdeauna!) Revenim: aria triunghiului dreptunghic ABC este astfel egală cu $\mathcal{A}_{ABC} = \dfrac{AB \cdot AC}{2} = 24$.

Subiectul al II-lea. 1. a) Se calculează imediat: $\det A = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 0 = a$, $\det B = b$, apoi $A + B = \begin{pmatrix} a+b & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = 2(a+b)$; dacă $a + b = 0$, atunci $\det A + \det B = a + b = 0 = 2 \cdot 0 = \det(A + B)$; b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} ab & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} ba & b+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ cum $ab = ba$, atunci $A \cdot B = B \cdot A$ dacă şi numai dacă $a + 1 = b + 1 \Leftrightarrow b = a$; c) $A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a+1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow a = 1$. **2.** a) Preferăm să începem cu un calcul total iniţial (dacă nu „merge”, e în regulă dacă reuşiţi să înlocuiţi valorile şi să arătaţi că $D(2, 0) = 4$; înseamnă 5 puncte din totalul celor 100!). Revenim la $D(x, y)$:

scădem linia a doua din a treia (linie) şi ajungem la: $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = ... = 2x - 2y$;

evident: $D(2, 0) = 2 \cdot 2 - 0 = 4$; b) Aici, pe oricare dintre căi, ar trebui să ajungeţi la rezultatul: $D(4, k) = 8 - 2k$ şi astfel, numărul cerut se obţine din $8 - 2k = 2 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3$; c) În mod cert primiţi puncte dacă scrieţi matricea $A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;

urmează să înmulţiţi, cu mare atenţie, două matrice de ordinul trei: $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

în acest moment finalizarea e chiar banală... dar, trebuie dat răspunsul la ce se cere: aşadar, suma elementelor matricei B este 27.

Subiectul al III-lea. 1. a) Deoarece $f(0+0) = \left(\frac{-1}{{}^{+}0}\right) = -\infty$, deducem că dreapta de ecuaţie $x = 0$ este asimptotă verticală, la dreapta, la graficul funcţiei; cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = 0$, rezultă că dreapta de ecuaţie $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei considerate; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f(2x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\cancel{x^2}}\cdot\frac{4\cancel{x^2}}{4x-1} = 2$;

c) $L = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-1-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{2}{1+1} = 1$. **2.** a) $A = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{x\cancel{(1-x)}} =$

$= 2 \in \mathbb{Z}$; b) $B = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{\sqrt{2-x}-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{2-x-1} = 2$; c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0,1\}$

şi $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; folosind semnul celor două funcţii continue, se obţine tabelul următor:

x	$-\infty$	0	1	2
$f(x)$	---------	0 +++	0 ------	
$g(x)$	+++++	++++	0 ------	
$f(x)\cdot g(x)$	--------	0 +++	0 +++	

Mulţimea soluţiilor inecuaţiei este astfel $S = (-\infty, 0]$.